**Pavlovits Tamás**:

*Perspektíva és végtelen a kora újkorban*

Jelen számunk tematikus blokkja két részből áll: Pascal két matematikai szövegének fordításából és a végtelen kora modern értelmezéseivel foglalkozó négy tanulmányból. A fordítások és a tanulmányok a „Perspektíva és megismerés a kora újkorban" című OTKA kutatási program gyümölcsei, amely szorosan kapcsolódik a Kora Újkori Filozófiatörténeti Műhely (KUFIM) tevékenységéhez. A tematikus blokk második részében található tanulmányok a KUFIM által 2011. május 11-én az ELTE Filozófiai Intézetében szervezett konferencián elhangzott előadások változatai.

Blaise Pascal két matematikai tanulmánya: az *Esszé a kúpszeletekről (Essais pour les Coniques)* és a *Kúpszeletek származtatása (Generatio conisectionum)* című írások tudománytörténeti szempontból a projektív- vagy perspektivikus geometria alapszövegei közé tartoznak. A geometriának ezt az ágát Appollóniusz, hellenizmus kori görög matematikus (Kr. e. 262-190) nyomán Pascal kortársa és mestere Girard Desargues (1591-1661) fedezte fel. Apollóniusz figyelt fel rá először, hogy ha egy kúpot egy síkkal különböző szögekben elmetszünk, akkor a kúppaláston különböző alakzatok, nevezetesen kör, ellipszis, parabola, hiperbola stb. jelennek meg. Ezeket nevezzük kúpszeleteknek, és Apollóniusz vizsgálta először ezek tulajdonságait. A kúpszeletek kutatásának Desargues nagy lökést adott azzal, hogy a kúpszeleteket olyan vetítés útján származtatta, amelynek során a kúp alapkörének minden egyes pontja a kúpot elmetsző síkra vetül oly módon, hogy az alapkör kerültének pontjait az alkotók mentén összekötjük a kúp csúcsával. Ezzel az eljárással alapította meg a projektív- vagy perspektivikus geometriát. A projektív geometria jelen esetben az ugyanahhoz a kúphoz tartozó különböző kúpszeletek egymáshoz viszonyított tulajdonságait vizsgálja. Desargues az erre vonatkozó kutatásait a *Brouillon-projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan* című művében publikálta 1639-ben. Egy évvel később, 1640-ben jelent meg Pascal első matematikai írása *Essai pour les Coniques* címmel. Blaise Pascal ekkor még csak 17 esztendős volt. Desargues-gal a Mersenne-akadémián került szorosabb kapcsolatba, aki feltehetően szárnyai alá vette az ifjú matematika-tehetséget. Az itt közölt első írás tehát mind Pascal élete, mind a matematikatörténet szempontjából fontos szerepet játszik. Az életében azért, mert ennek megjelentetésével vonta magára kortársai figyelmét Pascal. Descartes egész egyszerűen nem hitte el, hogy ez az írás a tizenhét éves ifjútól származik, először úgy vélekedett, hogy bizonyára Blaise apja, a matematikában szintén jártas Étienne Pascal írta, majd pedig azt gondolta, hogy lényegében Desargues a szerzője. Mások azonban, mint Desargues és Mersenne, elismerték és nagyra tartották Pascal művét, amely mind tudományos stílusában, mind tartalmában komoly előrelépést jelentett a desargues-i eredményekhez képest. Az *Essai pour les Coniques* tartalmazza azt a tételt, amelyet később Pascalról neveztek el, és amely kimondja, hogy egy kúpszeletbe írt hatszög szemközti oldalegyenesei egy pontban metszik egymást (ld. első tétel). Az *Esszé*ben nem találunk bizonyításokat, csak tételek tömör megfogalmazását. Ennek az az oka, hogy a szöveg egyetlen oldalon jelent meg nyomtatásban, és célja nem a tételek bizonyítása, hanem csupán a figyelemfelkeltés volt. Pascal tervbe vette ugyanis egy komolyabb, több értekezésből álló matematikai mű megírását a kúpszeletekről, amely 1654-re el is készült *Conicorum opus completum* címmel. Ebből sajnos csak egy latin nyelvű értekezés, a *Kúpszeletek származtatása (Generatio conisectionum)* maradt fent, amelynek fordítását az *Esszével* együtt szintén közreadjuk. Pascal 1663-ban bekövetkezett halála után Leibniznek még kezében volt a teljes corpus, gondosan össze is rendezte őket, de hiába szorgalmazta az örökösöknél mielőbbi kiadásukat. A *Kúpszeletek származtatása* a Leibniz által meghatározott rend szerint az első értekezés volt, amely a többi alapjául szolgált (Pascal 1970, 1103). Pascal itt állítja fel a kúp és a kúpszeletek definícióit; bizonyításokat itt sem találunk, ám a szöveg alapvető meghatározásokat tartalmaz a perspektivikusságra nézve.

Az *Esszé a kúpszeletekről* és a *Kúpszeletek származtatása* nemcsak tudománytörténetileg jelentős szövegek, hanem a későbbi pascali gondolkodás szempontjából is meghatározóak. A kúpszeletek projektív értelmezésekor Pascal több ponton is szemben találta magát a matematikai végtelen problémájával. A projektív geometriában szükségszerű feltételezni, hogy a párhuzamos egyenesek a végtelenben metszik egymást, ami az euklidészi geometriában nem magától értetődő. Pascal ezt a követelményt nem axiómaként, hanem definícióként vezeti be: „Két vagy több egyenest mindig egy ponton átmenőknek mondunk, bármilyen helyzetben legyenek is egymáshoz képest, véges távolságban, ha egy pontban metszik egymást, és végtelen távolságban, ha párhuzamosak" (3. definíció). Másrészt a kúpszeletek vetítéssel történő származtatása több esetben is azt eredményezi, hogy egy véges alakzatnak a képe adott esetben végtelen lesz, hiszen a parabola és a hiperbola is végtelen, miközben a kúp véges alapkörének képei. A vetítés pedig közvetlen megfeleltetést hoz létre a véges és a végtelen alakzat minden pontja között: „Ebből következik, hogy a parabola a végtelenbe tart és végtelen teret határoz meg, noha az alapkör kerületének képe, amely véges, és amely véges teret fog körbe." (6. definíciót követő megjegyzés). Ez a következmény megkövetelte annak elfogadást, hogy egy véges szakaszt végtelenül oszthatónak tekintsünk, ami a korban korántsem volt magától értetődő.[1] Pascal tehát már egészen korán arra kényszerült, hogy a végtelen által a matematikában okozott paradoxonokat megpróbálja kezelni, és ne elutasítsa, hanem beépítse matematikai megoldásaiba. A végtelenhez fűződő eme kettős viszony végigkíséri matematikai és filozófiai munkásságát.

A *Kúpszeletek származtatása* ugyanakkor a perspektivikusság szempontjából ismeretelméletileg is jelentős következményeket tartalmaz Pascal gondolkodására nézve. A 6. definícióból eredő első következmény a kúpszeletek elvont kérdéskörét a vizualitás területére utalja: „Ebből evidens módon következik, hogy ha a szem a kúp csúcsában helyezkedik el, és ha a tárgy a kúp alapkörének kerülete, és ha a vászon *(tabella)* maga a sík, amely így vagy úgy metszi a kúp felszínét, akkor a kúpszelet, amelyet e sík a kúpfelszínen létrehoz, legyen az pont, egyenes, szög, ellipszis, parabola vagy hiperbola, a kör kerületének képe lesz." A vizualitás rendkívül szemléletesen mutat rá a különböző geometriai objektumok (jelen esetben az alapkör és a kúpszeletek) egységére. Ha a kúpszeletként képződő kört, ellipszist, parabolát és hiperbolát kívülről, egy tetszőleges pontból szemléljük, akkor csak a különbségük ötlik a szemünkbe, ám ha „a szem a kúp csúcsában helyezkedik el", akkor ezek az alakzatok egymásra vetülnek, és egységesnek bizonyulnak. A kúp csúcsa tehát egy kitüntetett perspektívát határoz meg, amely a különbségekkel szemben az egység megpillantását és megértését teszi lehetővé. Ez a megismerési modell végigvonul Pascal életművén és a *Gondolatok*ban kifinomult filozófiai értelmezést nyer majd. Az, hogy képtelenek vagyunk például egy mindenki által elfogadott egységes morált kidolgozni és racionálisan megalapozni, annak köszönhető, hogy az ember, az őt minden oldalról körülvevő végtelenség folytán képtelen rálelni arra a perspektívára, ahonnan a különbségek egymásra vetülnének és az emberi perspektívákból különbözőnek bizonyuló dolgok egységesnek mutatkoznának.[2] A pascali gondolkodásban tehát perspektíva és végtelen egymással szorosan összekapcsolódó fogalmak.

A Pascal két geometriai értekezését követő tanulmányok közös pontját a kora újkori végtelen-értelmezések képezik. A végtelen fogalma különös jelentőséggel bírt a kora modern gondolkodásban. Egyrészt azért, mert – miként azt a projektív geometria megszületésének példája is mutatja – a matematikában kidolgozott új módszerek egyre fontosabbá tették a végtelen matematikai adaptációját, másrészt azért, mert a kopernikuszi forradalom révén egyre elfogadottabbá vált az univerzum végtelenségének gondolata, ami a mikroszkóp felfedezése folytán kiegészült az anyag végtelen oszthatóságának eszméjével, harmadrészt pedig

1 Ld. erről Pascal hosszabb fejtegetését a *Geometriai gondolkodásról* című művében (Pascal 1999, 52-54).

2 Ld.: *Gondolatok*, Br. 381. és Br. 383. töredék.

azért, mert a kora újkori metafizikai rendszeralkotó gondolkodásban központi szerepet játszott a tökéletesen végtelen Isten ideája. A 17. század az első (és talán az utolsó) korszak a nyugati eszmetörténetben, amikor a matematikai, a fizikai és a metafizikai végtelen egyszerre van jelen, és amelyet komoly filozófiai próbálkozások jellemeznek annak érdekében, hogy a végtelennek e három értelmezési formáját összefüggésbe hozzák egymással. A számunkban szereplő négy tanulmány ezekbe az értelmezési kísérletekbe nyújt bepillantást.

Moldvay Tamás „A valóság végtelensége" című tanulmányában Spinoza Mayernek írt 12. levelét értelmezi. Ebben a levélben Spinoza megkísérli tömören kifejteni a végtelenre vonatkozó tanítását. Moldvay Tamás figyelmét elsősorban az az ábra vonja magára, amellyel Spinoza a természetben megjelenő végtelen matematikai kifejezhetetlenségét illusztrálja. A szerző tanulmányában e matematizálhatatlanságnak az értelmezésére vállalkozik, mégpedig a descartes-i fizikának a kiterjedt szubsztanciára vonatkozó tételeire támaszkodva. Zemplén Gábor Áron „Analitikus szivárványfilozófia és Newton végtelenül egyszerű színei" című tanulmányában Newton színelméletét mutatja be, különös figyelmet szentelve azon ábrák elemzésének, amelyeket Newton színelméleti tanulmányainak illusztrálásához használt. A tanulmány középpontjában Newton színelméletének 1672-es legelső megfogalmazása áll, annak is az ötödik tétele, amely arra ad választ, hogy hány egyszerű színből áll a szivárvány. Noha Newton szerint a szivárvány végtelen színárnyalatra bontható, válasza mégis többértelmű. Zemplén Gábor Áron amellett érvel, hogy a meghatározás többértelműsége szándékolt Newton részéről. A modern fizika atyja így igyekezett kikerülni a nyílt konfrontációt a hagyományos fizikai és optikai elméletekkel, amelyek nem számoltak a végtelen lehetőségével. Schmal Dániel „A leibnizi végtelen és a fikcionalizmus problémája" című tanulmányában azt vizsgálja, vajon miért nem tulajdonított Leibniz realitást az infinitezimális kalkulusban alkalmazott végtelenül kis mennyiségeknek. Schmal Dániel amellett érvel, hogy Leibniz álláspontját nem matematikájából, hanem metafizikájából és ismeretelméletéből kiindulva érdemes magyarázni. Értelmezése szerint az anyagi világ jelenségei és a végtelenül ki mennyiségek közös jellegzetessége, hogy nélkülözik az egységet, és ezért mindkettő realitást nélkülöző, jól megalapozott fikcióknak minősülnek Leibniz filozófiájában. A tematikus blokk negyedik tanulmánya a végtelen kora újkori elgondolhatóságának problémáját elemzi két szerző: Pascal és Descartes alapján. Noha e két gondolkodó teljesen különböző értelmezését adta a végtelennek – míg Pascal a természetet tekinti végtelennek, és Isten kapcsán nem használja ezt a kifejezést, addig Descartes szerint a végtelen kizárólag Isten attribútuma, a természet legfeljebb határtalannak nevezhető –, a végtelen ismeretelméletileg hasonló pozíciót tölt be náluk: mindkét esetben rendkívüli evidenciája révén elgondolandó, ám a véges elmével való összemérhetetlensége folytán megérthetetlennek bizonyul. Mindhárom tanulmány rámutat arra, hogy a kora újkorban a végtelen beemelése a fizikai és matematikai magyarázatokba nem ment zökkenőmentesen, másrészt azt is hangsúlyozzák, hogy természetfilozófiai, metafizikai és matematikai alkalmazásai ellenére a végtelen bizonyos fokig megőrizte racionalizálhatatlan jellegét.

Végezetül szeretnék hálás köszönetet mondani Nagy Gábor matematikusnak, az SZTE Bolyai Intézete docensének, aki Pascal két matematikai szövegének fordítását szakmailag ellenőrizte, javította és a végső változat elkészítésében értékes tanácsokat adott. A Pascal szövegek fordítása a Jean Mesnard által szerkesztett kritikai összkiadás (Pascal 1970) második kötete alapján és a jegyzetek felhasználásával készült. A fordítás és e szám tematikus blokkja az OTKA K 81165 és a K 67798 számú projektjeinek támogatásával valósult meg.

## Irodalom:

Pascal, Blaise (1970): *Oeuvres complètes*, éd. Jean Mesnard, 2. kötet, Paris: Desclée de Brouwer.

Pascal, Blaise (1999): *Írások a szerelem szenvedélyéről, a geometriai gondolkodásról és a kegyelemről*, ford. Tímár Andrea és Pavlovits Tamás, Budapest: Osiris.